*研究简讯*

# 二维正交的多加细函数和多小波滤波器*

杨守志

汕头大学数学系，汕头 515063

**摘要** 基于两种不同伸缩矩阵的二维正交小波滤波器，给出两类二维正交的多小波滤波器的显式构造算法，从而构造出相应的二维正交的多加细函数．最后给出正交多小波滤波器的构造算例．

**关键词** 加细函数 多加细函数 小波 多小波 滤波器

## 1 基本概念

设 $\phi(X)$是加细函数，它满足如下加细方程

$$\phi(X) = \sum_{\alpha} p_\alpha \phi(MX-\alpha), \alpha \in \mathbb{Z}^2, X \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

其中 $M$ 是伸缩矩阵，$\{p_\alpha\}$为加细面具．定义 $P(\omega)=\det(M^{-1})\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} p_\alpha e^{-i\alpha\cdot\omega}$，$\omega=[\omega_1, \omega_2]$ 是加细面具$\{p_\alpha\}$的两尺度序列的符号，$\det(A)$表示矩阵 $A$ 的行列式．

为了简便，记一个函数生成的多分辨分析为u-MRA，多个函数生成的多分辨分析为m-MRA．设 $V_j^u$ 是单个函数生成的多分辨分析．若子空间序列$\{V_j^u\}$形成正交的多分辨分析(u-MRA)，则称 $\phi(X)$为二维正交的尺度函数．

设 $\det(M)=a$，则由小波分析理论可知[1~3]，存在 $a-1$ 个小波函数 $\psi^i(X)$，$i=1, 2, \cdots, a-1$，即存在 $a-1$ 个序列 $\{q_\alpha^i\}\alpha\in\mathbb{Z}^2$ 有

$$\psi^i(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} q_\alpha^i \phi(MX-\alpha), i = 1,2,\cdots,a-1. \quad (2)$$

类似地，定义序列$\{q_\alpha^i\}$的两尺度序号为 $Q^i(\omega)=\det(M^{-1})\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} q_\alpha^i e^{-i\alpha\cdot\omega}$.

设 $\Phi(X)=(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_r)^T$ 是 $r$ 重多尺度函数($\phi_1(X), \phi_2(X), \cdots, \phi_r(X)\in L^2(\mathbb{R}^2)$)，满足如下的两尺度方程：

$$\Phi(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} A_\alpha \Phi(MX-\alpha), X \in \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

称 $r\times r$ 矩阵序列$\{A_\alpha\}$为两尺度矩阵序列．定义 $A(\omega)=\det(M^{-1})\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} A_\alpha e^{-i\alpha\cdot\omega}$称为矩阵序列$\{A_\alpha\}$的两尺度矩阵符号．由文献[4～6]知，当 $\Phi(X)$是正交的多尺度函数，则它可生成一个 $r$ 重正交的多分辨分析(m-MRA)$\{V_j^m\}$．因此存在 $a-1$ 个正交向量函数 $\Psi^i(X)=(\psi_1^i, \psi_2^i, \cdots, \psi_r^i)^T$，$\psi_l^i\in L^2(R^2)$，$l=1, 2, \cdots, r$；$i=1, 2, \cdots, a-1$ 构成一个多小波．从而存在 $a-1$ 个 $r\times r$ 矩阵序列$\{B_\alpha^i\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}$有

$$\Psi^i(X) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} B_\alpha^i \Phi(MX-\alpha). \quad (4)$$

定义矩阵序列$\{B_\alpha^i\}$的两尺度符号为 $B^i(\omega)=$

2003-07-01 收稿，2003-08-22 收修改稿

* 汕头大学博士启动基金项目

E-mail：szyang@stu.edu.cn

$\det(M^{-1})\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}B_\alpha^i e^{-i\alpha\cdot\omega}$.

满足方程(3)的函数存在性及这个函数为正交的多尺度函数的条件有多人对此进行了研究[7~10]. 但通常采用迭代方法，即构成一个无穷乘积 $\hat{\Phi}(\omega)=(\prod_{j=1}^{\infty}A(\det(M^{-j})\omega))\hat{\Phi}(0)$ 的形式，如果这个无穷矩阵乘积 $(\prod_{j=1}^{\infty}A(\det(M^{-j})\omega)$ 收敛,则可以定义一个加细函数 $\hat{\Phi}(\omega)$.

## 2 伸缩矩阵 $M=2I$ 的正交多小波滤波器的构造

本节讨论由伸缩矩阵 $M=2I$ 的二维正交小波滤波器构造二重正交多小波滤波器的方法，包括低通和高通滤波器的构造. 为了讨论的方便，引入记号：$\pi_0=(0,0)$，$\pi_1=(\pi,0)$，$\pi_2=(0,\pi)$，$\pi_3=(\pi,\pi)$；并用 $A^*$ 表示矩阵 $A$ 的共轭转置.

### 2.1 二重正交低通多小波滤波器

为了讨论的方便，设两尺度矩阵符号具有的形式为 $A(\omega)=\begin{bmatrix}H(\omega) & 0\\ G(\omega) & F(\omega)\end{bmatrix}$，由文献[5]的结论可以推出，如果它对应于一个2重正交的低通多小波滤波器，则它必须满足：

$$\sum_{j=1}^{3}A(\omega+\pi_j)A(\omega+\pi_j)^*=I_2, \tag{5}$$

等价的有下列等式成立：

$$\sum_{j=1}^{3}|H(\omega+\pi_j)|^2=1,$$
$$\sum_{j=1}^{3}H(\omega+\pi_j)\overline{G(\omega+\pi_j)}=0,$$
$$\sum_{j=1}^{3}[|G(\omega+\pi_j)|^2+|F(\omega+\pi_j)|^2]=1. \tag{6}$$

下面给出构造 $A(\omega)$ 的方法，即给出构造 $H(\omega)$，$G(\omega)$，$F(\omega)$ 的方法.

**引理1** 设 $s(\omega)$，$h(\omega)$ 满足条件：(1) 均以 $\pi$ 为周期函数，即 $s(\omega+\pi_j)=s(\omega+\pi_0)$，$h(\omega+\pi_j)=h(\omega+\pi_0)$，$j=1,2,3$；(2) $|s(\omega)|^2+|h(\omega)|^2=1$；(3) $s(\omega)h(\omega)\neq0$，则 $|s(\omega)|<1$，$|h(\omega)|<1$.

设 $\phi^i(X)$，$i=1,2$ 是两个伸缩矩阵为 $M=2I$ 的二维正交尺度函数，$\psi^{i,k}(X)$，$k=1,2,3$；$i=1,2$ 为分别对应的正交小波，$p^i(\omega)$，$q^{i,k}(\omega)$，$k=1,2,3$；$i=1,2$ 分别为 $\phi^i(X)$，$\psi^{i,k}(X)$ 对应的两尺度符号，定义一个下三角矩阵

$$A(\omega)=\begin{bmatrix}p^1(\omega) & 0\\ s(\omega)q^{1,1}(\omega) & h(\omega)p^2(\omega)\end{bmatrix}. \tag{7}$$

**定理1** 设 $s(\omega)$，$h(\omega)$ 为满足引理1条件的两个函数，$A(\omega)$ 为(7)式定义的三角矩阵，则 $A(\omega)$ 定义一个二重正交的低通小波滤波器，即 $A(\omega)$ 满足(5)式.

**证明** 因为 $p^1(\omega)$，$q^{1,1}(\omega)$ 分别为正交尺度函数 $\phi^1(X)$ 和对应的正交小波 $\psi^{1,1}(X)$ 的两尺度符号，$p^2(\omega)$ 是另一个正交尺度函数 $\phi^2(X)$ 所对应的两尺度符号，根据文献[5,6]知，有 $\sum_{j=1}^{3}p^1(\omega+\pi_j)p^1(\omega+\pi_j)^*=1$，$\sum_{j=1}^{3}p^1(\omega+\pi_i)\ q^{1,1}(\omega+\pi_j)^*=0$，$\sum_{j=1}^{3}q^{1,1}(\omega+\pi_j)q^{1,1}(\omega+\pi_j)^*=1$，$\sum_{j=1}^{3}q^{1,1}(\omega+\omega_j)q^{1,i}(\omega+\omega_j)^*=0(i\neq1)$，$\sum_{j=1}^{3}p^2(\omega+\pi_j)p^2(\omega+\pi_j)^*=1$. 又由于 $s(\omega)$，$h(\omega)$ 是以 $\pi$ 的周期函数，且满足 $|s(\omega)|^2+|h(\omega)|^2=1$，运用矩阵乘法可以得到

$$\sum_{j=1}^{3}A(\omega+\pi_j)A(\omega+\pi_j)^*=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{3}|p^1(\omega+\pi_j)|^2 & \sum_{j=1}^{3}s(\omega+\pi_j)^*p^1(\omega+\pi_j)q^{1,1}(\omega+\pi_j)^*\\ \sum_{j=1}^{3}s(\omega+\pi_j)p^1(\omega+\pi_j)^*q^{1,1}(\omega+\pi_j) & U(\omega+\pi_j)\end{bmatrix},$$

其中 $U(\omega+\pi_j)=\sum_{j=1}^{3}[|s(\omega+\pi_j)|^2|q^{1,1}(\omega+\pi_j)|^2+|h(\omega+\pi_j)|^2|p^2(\omega+\pi_j)|^2]$. 显然 $\sum_{j=1}^{3}|p^1(\omega+\pi_j)|^2=1$, $\sum_{j=1}^{3}s(\omega+\pi_j)^*p^1(\omega+\pi_j)q^{1,1}(\omega+\pi_j)^*=0$. 下面说明 $U(\omega+\pi_j)=1$. 事实上 $U(\omega+\pi_j)=\sum_{j=1}^{3}[|s(\omega+\pi_j)|^2|q^{1,1}(\omega+\pi_j)|^2+|h(\omega+\pi_j)|^2|p^2(\omega+\pi_j)|^2]=|s(\omega)|^2\sum_{j=1}^{3}[|q^{1,1}(\omega+\pi_j)|^2]+|h(\omega)|^2\sum_{j=1}^{3}[|p^2(\omega+\pi_j)|^2]=|s(\omega)|^2+|h(\omega)|^2=1$. 这意味着 $A(\omega)$满足(5)式.

**定理2** $A(\omega)$是(7)式定义的下三角矩阵，则矩阵$A(0)$有两个特征值，其中一个等于1，另一个特征值为$h(0)$，其绝对值小于1.

**证明** 由于 $A(0)=\begin{bmatrix}p^1(0) & 0\\ s(0)q^{1,1}(0) & h(0)p^2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & h(0)\end{bmatrix}$，所以，$A(0)$的两个特征值，一个等于1，另一个特征值为$h(0)$，再由引理1知，$|h(0)|<1$.

### 2.2 二重正交高通多小波滤波器

上面讨论了三角矩阵符号$A(\omega)$生成重数为2的正交低通多小波滤波器的构造方法. 下面在此基础上给出对应$A(\omega)$生成的二重正交多小波滤波器的显示构造算法.

设$\mathcal{A}=[A(\omega+\pi_0), A(\omega+\pi_1), A(\omega+\pi_2), A(\omega+\pi_3)]$, $\mathcal{B}_i=[B^i(\omega+\pi_0), B^i(\omega+\pi_1), B^i(\omega+\pi_2), B^i(\omega+\pi_3)]$, $i=1, 2, 3$, 构造矩阵$B^k(\omega)(k=1, 2, 3,)$和$M(\omega)$分别为

$$B^k(\omega)=\begin{bmatrix}0 & q^{2,k}(\omega)\\ h(\omega)q^{1,k}(\omega) & -s(\omega)p^2(\omega)\end{bmatrix},$$
$$M(\omega)=[\mathcal{A}^{\mathrm{T}}\quad \mathcal{B}_1^{\mathrm{T}}\quad \mathcal{B}_2^{\mathrm{T}}\quad \mathcal{B}_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

**定理3** 设$A(\omega)$, $B^k(\omega)$, $M(\omega)$分别是由(7)和(8)式定义的矩阵，则在定理1的条件下，矩阵$M(\omega)$是酉矩阵.

**证明** 根据小波的构造定理知，仅需证明$M(\omega)$是酉矩阵. 在定理1的条件下，可以验证矩阵

$$\begin{bmatrix}
p^1(\omega+\pi_0) & 0 & \cdots & p^1(\omega+\pi_3) & 0\\
s(\omega+\pi_0)q^{1,1}(\omega+\pi_0) & h(\omega+\pi_0)p^2(\omega+\pi_0) & \cdots & s(\omega+\pi_3)q^{1,1}(\omega+\pi_3) & h(\omega+\pi_3)p^2(\omega+\pi_3)\\
0 & q^{2,1}(\omega+\pi_0) & \cdots & 0 & q^{2,1}(\omega+\pi_3)\\
h(\omega+\pi_0)q^{1,1}(\omega+\pi_0) & -s(\omega+\pi_0)p^2(\omega+\pi_0) & \cdots & h(\omega+\pi_3)q^{1,1}(\omega+\pi_3) & -s(\omega+\pi_3)p^2(\omega+\pi_3)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & q^{2,3}(\omega+\pi_0) & \cdots & 0 & q^{2,3}(\omega+\pi_3)\\
h(\omega+\pi_0)q^{1,3}(\omega+\pi_0) & -s(\omega+\pi_0)p^2(\omega+\pi_0) & \cdots & h(\omega+\pi_3)q^{1,3}(\omega+\pi_3) & -s(\omega+\pi_3)p^2(\omega+\pi_3)
\end{bmatrix}$$

是酉矩阵. 即$M(\omega)$是酉矩阵，从而完成定理3的证明.

根据定理1~3知，$A(\omega)$, $B^k(\omega)$, $k=1, 2, 3$构成一对正交多小波滤波器，其中$A(\omega)$为低通多小波滤波器，$B^k(\omega)$, $k=1, 2, 3$为高通多小波滤波器.

**注释** 由于在构造中采用的两尺度符号是下三角矩阵的形式，因此构造出的2重尺度函数的第1个函数的连续性与所给的尺度函数的连续性相同，但对第2个函数的连续性问题的讨论是很复杂的，因为影响其连续性的因素较多，主要有如下两个因素：(1) 原来的尺度函数和小波函数的连续性；(2) 在构造中引入的两个因子函数$s(\omega)$, $h(\omega)$的性质. 如何选择恰当的因子函数$s(\omega)$, $h(\omega)$，使所构造的尺度函数具有较好的连续性是一个有待解决的问题.

## 3 伸缩矩阵为 $M=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$的正交多小波滤波器的构造

类似第2节，为叙述方便，不妨仍设两尺度矩阵符号具有形式 $A(\omega)=\begin{bmatrix}H(\omega) & 0\\ G(\omega) & F(\omega)\end{bmatrix}$，由文献[4]知，如果它对应于一个伸缩矩阵为 $M=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$的

2重正交的低通多小波滤波器，则它必须满足：

$$A(\omega+\pi_0)A(\omega+\pi_0)^*+A(\omega+\pi_3)A(\omega+\pi_3)^*=I_2. \tag{9}$$

下面给出一种构造 $A(\omega)$ 的方法，即给出构造 $H(\omega)$，$G(\omega)$，$F(\omega)$的方法.

设 $\phi^i(X)$，$i=1$，2是两个伸缩矩阵为 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$的二维正交尺度函数，$\psi^i(X)$，$i=1$，2分别为 $\phi^i(X)$对应的正交小波，$p^i(\omega)$，$q^i(\omega)$，$i=1$，2分别为 $\phi^i(X)$，$\psi^i(X)$对应的两尺度符号，定义一个下三角矩阵

$$\boldsymbol{A}(\omega)=\begin{bmatrix}p^1(\omega) & 0\\ s(\omega)q^1(\omega) & h(\omega)p^2(\omega)\end{bmatrix}. \tag{10}$$

**定理4** 设 $s(\omega)$，$h(\omega)$为满足引理1条件的两个函数，$\boldsymbol{A}(\omega)$为(10)式定义的下三角矩阵，则 $\boldsymbol{A}(\omega)$定义一个伸缩矩阵为 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$的二重正交的低通小波滤波器，即 $\boldsymbol{A}(\omega)$满足(9)式.

**定理5** $\boldsymbol{A}(\omega)$是(10)式定义的下三角矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}(0)$有两个特征值，其中一个等于1，另一个特征值为 $h(0)$，其绝对值小于1.

定理4和5可类似定理1和2的证明方法证明，这里省略.

构造矩阵 $\boldsymbol{B}(\omega)$，$\boldsymbol{M}(\omega)$分别为

$$\boldsymbol{B}(\omega)=\begin{bmatrix}0 & q^2(\omega)\\ h(\omega)q^1(\omega) & -s(\omega)p^2(\omega)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}(\omega)=\begin{bmatrix}A(\omega+\pi_0) & A(\omega+\pi_3)\\ B(\omega+\pi_0) & B(\omega+\pi_3)\end{bmatrix}. \tag{11}$$

类似定理3，我们有

**定理6** 设 $\boldsymbol{A}(\omega)$，$\boldsymbol{B}(\omega)$，$\boldsymbol{M}(\omega)$分别是由(10)和(11)式定义的矩阵，则在定理5的条件下，矩阵 $\boldsymbol{M}(\omega)$是酉矩阵. 换言之，$\boldsymbol{A}(\omega)$，$\boldsymbol{B}(\omega)$构成一对正交多小波滤波器.

## 4 构造算例

**例** 设 $p^1(\omega_1,\ \omega_2)=\frac{1}{4}[(1+e^{i\omega_1})+(1+e^{3i\omega_1})\cdot e^{i\omega_2}]$，$q^{1,1}(\omega_1,\ \omega_2)=-\frac{1}{4}[(1-e^{i\omega_1})+(e^{i\omega_1}-e^{-2i\omega_1})e^{i\omega_2}]$，$q^{1,2}(\omega_1,\ \omega_2)=-\frac{1}{4}[(1+e^{i\omega_1})+(1+e^{3i\omega_1})e^{i\omega_2}]$，$q^{1,3}(\omega_1,\ \omega_2)=\frac{1}{4}[(1-e^{i\omega_1})-(e^{i\omega_1}-e^{-2i\omega_1})e^{i\omega_2}]$，可以验证 $p^1$，$q^{1,k}$，$k=1$，2，3是伸缩矩阵为 $\boldsymbol{M}=2I$ 一组二维正交的小波滤波器，为简单设 $p^1(\omega_1,\ \omega_2)=p^2(\omega_1,\ \omega_2)$，则对应的有 $q^{1,k}(\omega_1,\ \omega_2)=q^{2,k}(\omega_1,\ \omega_2)$，$k=1$，2，3，任取满足引理1条件的 $s(\omega_1,\ \omega_2)$，$h(\omega_1,\ \omega_2)$，然后再应用(7)和(8)式可得到一组伸缩矩阵为 $\boldsymbol{M}=2I$ 重数为2的正交多小波滤波器 $A(\omega_1,\ \omega_2)$，$B^k(\omega_1,\ \omega_2)$，$k=1$，2，3，其中 $A(\omega_1,\ \omega_2)$为正交低通多小波滤波器，$B^k(\omega_1,\ \omega_2)$为正交的高通多小波滤波器.

**致谢** 审稿者的宝贵意见使本文得到了很大的改进，在此对审稿者深表感谢.

## 参考文献


1 Daubechies I. Ten Lecture on Wavelets CBMSNSF Series in Applied Math. Philadelphia: SIAM, Publ, 1992

2 Daubechies I. Orthonormal basis of compactly supported wavelets. Comm Pure and Appl Math, 1988, 41(7): 909

3 Chui C K, et al. Construction of compactly supported symmetric and antisymmetric orthonprmal wavelets with scale = 3. Appl Comput Harmon Anal, 1995, 1(2): 21

4 Cabrelli C, et al. Accuracy of several multidimensional refinable distributions. J Fourier Anal Appl, 2000, 6(5): 483

5 Yang Shouzhi, et al. Construction of biorthogonal multiwavelets. J Math Anal Appl, 2002, 276(1): 1

6 Yang Shouzhi, et al. Construction of compactly supported orthogonal multiwavelets with scale = a. Chinese J Num Math Appl, 2003, 25(1): 7

7 He Wenjie, et al. Construction of bivariate compactly supported biorthogonal box spline wavelets with arbitrarily high regularities. Appl Comput Harmon Anal, 1999, 1(6): 53

8 Lian J. Orthogonal criteria for multiscaling functions. Appl Comp Harm Anal, 1998, 3(5): 277

9 Jiang Qingtang. Multivariate matrix refinable functions with arbitrary matrix dilation. Trans Amer Math Soc, 1999, 351(6): 2407

10 Han Bin, et al. Multiwavelet frames from refinable function vector. Adv Comput Math, 2003, 18(2): 211